CURSOS 0
MATEMÁTICAS

Conjuntos, correspondencias y relaciones

Ana María Díaz Hernández
Departamento de Matemática Aplicada I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

UNED

CURSOS 0

Índice general

1. Introducción y objetivos

Dada la diversa procedencia de los estudiantes que se incorporan a la UNED es natural que no todos tengan la misma base de conocimientos. Algunos no necesitarán siquiera leer las páginas siguientes pero a los que no están familiarizados con los términos de la teoría de conjuntos les serán necesarias.

Los conjuntos, el lenguaje formal y los símbolos utilizados son herramientas ineludibles para abordar el estudio del resto de las materias en las carreras de ciencias y tecnológicas.

1.1. Objetivos

Con la inclusión de este módulo pretendemos que los estudiantes puedan:

- Entender el lenguaje matemático de los símbolos más frecuentes.
- Expresar frases del lenguaje natural con lenguaje matemático y simbólico.
- Utilizar con soltura los conjuntos y los gráficos.
- Aplicar a otras materias los conocimientos adquiridos.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

{Vocales del alfabeto español} es la descripción de un conjunto por extensión.	**Verdadero**	**Falso**
$A = \{1, 3, 5, 7\}$ se puede describir por comprensión.	**Verdadero**	**Falso**
$5 \subset A$ es una expresión correcta referida al conjunto A anterior.	**Verdadero**	**Falso**
$A \cup B$ tiene 10 elementos si $B = \{x \| x$ son números impares positivos menores que $12\}$ y A es el conjunto anterior.	**Verdadero**	**Falso**
$A \cap B \subset B$.	**Verdadero**	**Falso**
$A \cap B = A$ si A y B son los conjuntos anteriores.	**Verdadero**	**Falso**
$A - (A \cap B) = \emptyset$ si A y B son los conjuntos anteriores.	**Verdadero**	**Falso**
Una correspondencia entre dos conjuntos es un subconjunto del producto cartesiano de ambos.	**Verdadero**	**Falso**
Una relación binaria en un conjunto, A, es una correspondencia de A en A.	**Verdadero**	**Falso**
Una relación binaria, R, es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido muchas dificultades debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.

Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas.

Si ha respondido todo correctamente pase a otro módulo.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Descripción de un conjunto

Aunque el uso de la palabra conjunto está generalizado, al intentar definirlo se incurre en contradicciones de lógica que dan lugar a famosas paradojas, para evitarlo utilizaremos la idea intuitiva de **conjunto**: "colección de objetos".

- Si dado un objeto cualquiera, a, se sabe si pertenece al conjunto A, diremos que el **conjunto** **A está bien definido**.
  Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas.
  Los elementos se denotan con letras minúsculas.
  $a \in A$ quiere decir que a es un elemento de A.
- Definir un conjunto por **comprensión** es dar una propiedad que caracteriza a sus elementos. Si un elemento tiene la **propiedad característica** pertenece al conjunto.
- Si un conjunto es finito se puede describir por **extensión**. (Dando todos sus elementos)
- Un conjunto es **finito** si tiene un número finito de elementos.
- Para representar conjuntos son muy útiles los **diagramas**, aunque hay muchos tipos, los más conocidos son los **"Diagramas de Venn o Círculos de Euler"**.
- Un conjunto que no tiene ningún elemento se llama **conjunto vacío**, y se representa por el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo 1: Sea V el conjunto de vocales del alfabeto español.

- V es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece al conjunto.

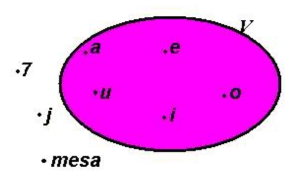
a, u son elementos del conjunto: $a \in V$ y $u \in V$
$j, 7$ no son elementos del conjunto: $j \notin V$ y $7 \notin V$
$mesa$ no es un elemento del conjunto: $mesa \notin V$

- El conjunto $V = \{\textit{Vocales del alfabeto español}\}$ está descrito por **comprensión**.
  La **propiedad que caracteriza** a sus elementos es "*ser vocal del alfabeto español*".

- Este conjunto también queda perfectamente definido por **extensión**, es decir, dando el listado de todos sus elementos:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- V se puede representar mediante el **diagrama**:



- V no es un **conjunto vacío**: $V \neq \emptyset$.
  Los elementos que no pertenecen a V quedan fuera del círculo.

- Para describir conjuntos se utilizan "llaves": {...}

Ejemplo 2: Si A es el conjunto de números enteros positivos que son múltiplos de 3 y menores que 15, entonces:

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece a A o no:

  $6 \in A$: 6 pertenece a A porque $6 = 2 \cdot 3$ es menor que 15.
  $21 \notin A$: 21 no es del conjunto porque no es menor que 15.

- $A = \{$*Números enteros positivos, múltiplos de* 3, *menores que* $15\}$ está descrito por **comprensión**.
  Es frecuente escribir A con lenguaje matemático: [1]

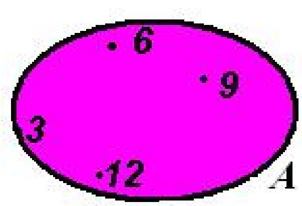
  $$\{x | x \in \mathbb{Z}^+, x = \dot{3}, x < 15\} = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 4\}$$

  Una **propiedad que caracteriza** a sus elementos es "*ser enteros positivos múltiplos de 3 y menores que 15*".

- Por ser un conjunto finito también se puede definir por **extensión**, es decir, dando el listado de todos sus elementos:

  $$A = \{3, 6, 9, 12\}$$

- A queda representado por el siguiente **diagrama de Venn**:



Ejemplo 3: Descripción del conjunto $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto cualquiera podemos saber si pertenece a dicho conjunto A:

$6 \notin A$: 6 no es un elemento del conjunto.
$0 \in A$: 0 sí es uno de los elementos del conjunto A.

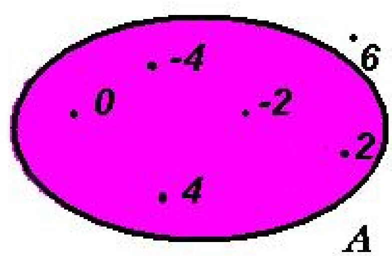
- El conjunto $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ está descrito por **extensión** pero se pueden encontrar **propiedades que caracterizan** sus elementos, por ejemplo:

"*Ser números pares de valor absoluto menor que* 5"

- Utilizando ésta u otra propiedad característica el conjunto queda definido por **comprensión**:

$$A = \{x | x \text{ son números pares con } -5 < x < 5\}$$

- A queda representado por el siguiente **diagrama de Venn**:



- A no es el **conjunto vacío**: $A \neq \emptyset$.

Ejemplo 4: Descripción del conjunto A de los números enteros positivos que son solución de la ecuación $x + 5 = 2$.

- A es un conjunto **bien definido** porque dado un objeto, x, podemos saber si es un número positivo que cumple $x+5 = 2$.

  $6 \notin A$: 6 no es un elemento del conjunto porque $6 + 5 \neq 2$.
  $-3 \notin A$: -3 no pertenece al conjunto porque no es positivo.

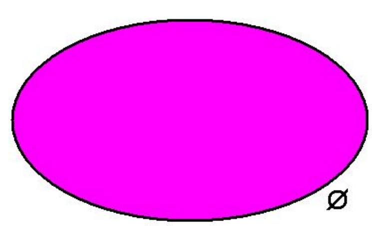
- A = {*números enteros positivos solución de la ecuación* $x + 5 = 2$} está descrito por **comprensión**; en lenguaje matemático sería:

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}^+;\ x + 5 = 2\}$$

- La **propiedad que caracteriza** a sus elementos, x, es:

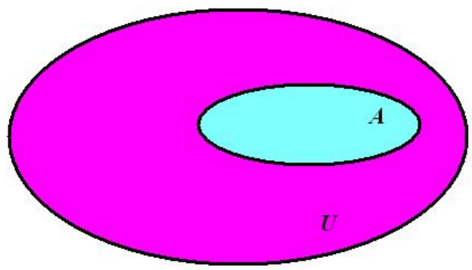
  "Ser números enteros positivos que cumplen $x + 5 = 2$"

- Este conjunto también quedaría perfectamente definido dando el listado de todos sus elementos, es decir, ninguno. A es el **conjunto vacío**: $A = \emptyset$.



3.2. Ficha 2: Partes de un conjunto

- Si cada elemento de un conjunto A pertenece a otro conjunto U diremos que A está **contenido** en U o que A es un **subconjunto** de U y escribiremos $A \subset U$.

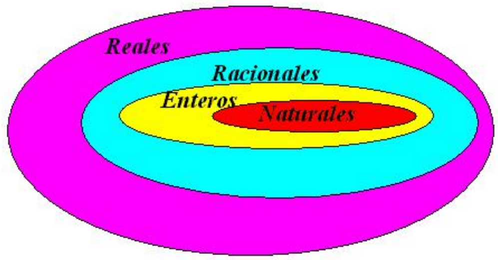


- Cada subconjunto de un conjunto es una parte de dicho conjunto.
  Los elementos del conjunto de partes de un conjunto son los subconjuntos de dicho conjunto.

- Dos conjuntos son **iguales** cuando todos los elementos de ambos coinciden:

  $A = B$ si A está contenido en B y B está contenido en A.

- Si cada conjunto está contenido en el siguiente se llaman **conjuntos anidados**.



- Conjunto **referencial** o **universal** puede ser cualquier conjunto que contenga a todos los conjuntos a que nos estamos refiriendo en cada caso.

- **Conjunto potencia o de partes del conjunto** es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto dado.

- $P(A)$ representa el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A.

- **El número de subconjuntos** de un conjunto de n elementos es 2^n.

Ejemplo 5: Siendo $A = \{a, o\}$ el conjunto de las vocales de "valor" y $U = \{v, a, l, o, r\}$ el conjunto de las letras de "valor", se cumple:

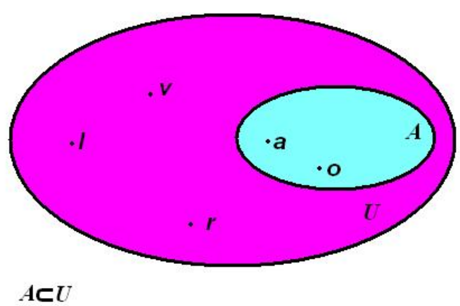
- Cada elemento del conjunto A pertenece al conjunto U:

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \text{ y } a \in U \\ o \in A \text{ y } o \in U \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset U \ (A \textbf{ está contenido} \text{ en } U).$$

  $A \subset U$ es equivalente a $U \supset A$ (U **contiene** a A).

- U **no está contenido** en A porque hay elementos de U que no pertenecen a A, por ejemplo $v \in U$ y $v \notin A$.

- Los conjuntos finitos A y U no son **iguales** porque no tienen los mismos elementos y, como es evidente, aunque A sí está contenido en U, U no está contenido en A. A tiene tres elementos y U tiene cinco elementos.

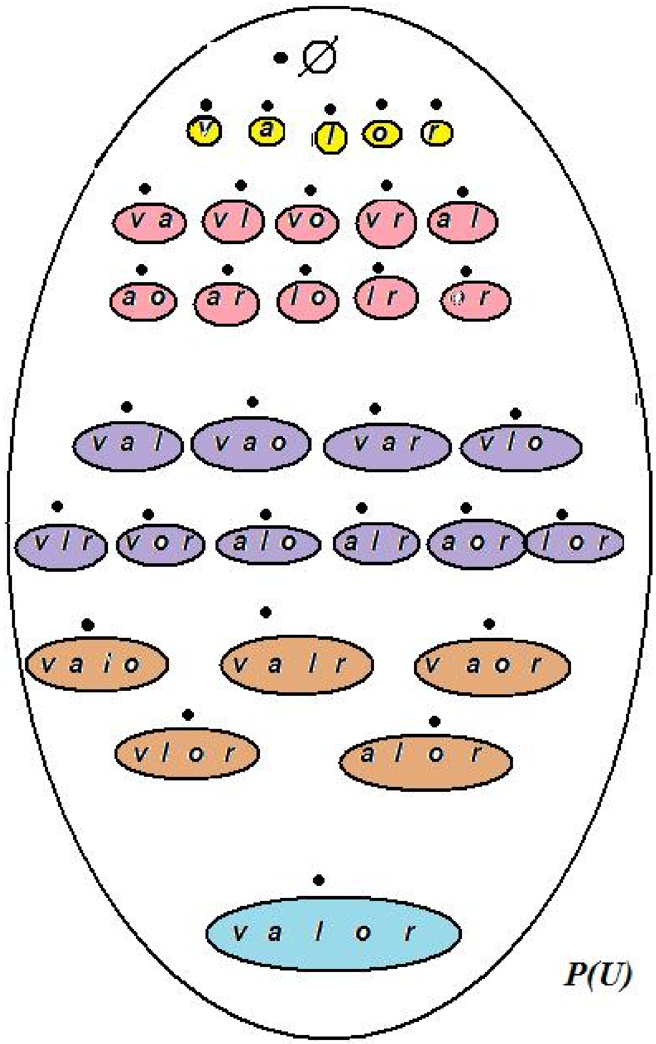


- Conjunto **referencial** o **universal**. En este caso estamos utilizando los conjuntos A y U, el conjunto referencial es U, ya que A es un subconjunto de U.

Partes del conjunto U: Con los elementos del conjunto anterior, U, se pueden formar los siguientes subconjuntos:

- De ningún elemento: El conjunto vacío: $\emptyset$.
- De un elemento: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 1 en 1, es decir, $\frac{5}{1} = 5$, que son:
  $\{v\}, \{a\}, \{l\}, \{o\}, \{r\}$.
- De dos elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 2 en 2, es decir, $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, que son:
  $\{v, a\}, \{v, l\}, \{v, o\}, \{v, r\}, \{a, l\}, \{a, o\}$ $\{a, r\}, \{l, o\},$
  $\{l, r\}, \{o, r\}$.
- De tres elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 3 en 3, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$, que son:
  $\{v, a, l\}, \{v, a, o\}, \{v, a, r\}, \{v, l, o\}, \{v, l, r\}, \{v, o, r\},$
  $\{a, l, o\}, \{a, l, r\}, \{a, o, r\}, \{l, o, r\}$.
- De cuatro elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 4 en 4, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$, que son:
  $\{v, a, l, o\}, \{v, a, l, r\}, \{v, a, o, r\}, \{v, l, o, r\}, \{a, l, o, r\}$.
- De cinco elementos: Hay las combinaciones de 5 elementos tomadas de 5 en 5, es decir, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$, que es:
  $\{v, a, l, o, r\}$.

Número de subconjuntos de U:
Con los elementos de U del ejemplo 5 se pueden formar $2^5 = 32$ subconjuntos.



- Cada uno de los elementos que forman el conjunto de partes de U es un subconjunto representado en el diagrama por una ficha coloreada que, a su vez es un conjunto de distintos elementos de U.

Ejemplo 6: Si x, y representan números enteros no negativos de un dígito, el conjunto $U = \{x | x + y = 9 \text{ con } y \leq 4\}$ se puede describir por extensión:

Si $y = 4 \Rightarrow x = 5$; Si $y = 3 \Rightarrow x = 6$; Si $y = 2 \Rightarrow x = 7$;
Si $y = 1 \Rightarrow x = 8$; Si $y = 0 \Rightarrow x = 9$.

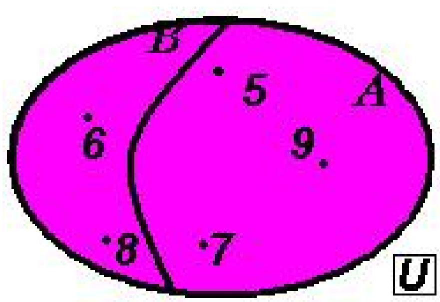
$$U = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$A = \{5, 7, 9\}$ y $B = \{6, 8\}$ son subconjuntos de U entre los que hay las siguientes relaciones de inclusión:

$$\left.\begin{array}{l} 5 \in A \text{ y } 5 \in U \\ 7 \in A \text{ y } 7 \in U \\ 9 \in A \text{ y } 9 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow A \textbf{ está contenido} \text{ en } U\text{: } A \subset U.$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \in B \text{ y } 6 \in U \\ 8 \in B \text{ y } 8 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow B \textbf{ está contenido} \text{ en } U\text{: } B \subset U.$$

A **no está contenido** en B: $5, 7, 9 \in A$ y $5, 7, 9 \notin B$.
B **no está contenido** en A: $6, 8 \in B$ y $6, 8 \notin A$.
U **no está contenido** en A ni en B.



En este caso estamos utilizando los conjuntos A, B y U, un conjunto referencial es U, ya que A y B son subconjuntos de U.

Con los elementos de U se pueden formar los siguientes subconjuntos o partes:

- De ningún elemento: $\emptyset$.
- De un elemento: $\{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}$.
- De dos elementos: $\{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{5,9\}, \{6,7\}, \{6,8\}$ $\{6,9\}, \{7,8\}, \{7,9\}, \{8,9\}$.
- De tres elementos: $\{5,6,7\}$, $\{5,6,8\}$, $\{5,6,9\}$, $\{5,7,8\}$, $\{5,7,9\}$, $\{5,8,9\}$, $\{6,7,8\}$, $\{6,7,9\}$, $\{6,8,9\}$, $\{7,8,9\}$.
- De cuatro elementos: $\{5,6,7,8\}, \{5,6,7,9\}, \{5,7,8,9\}$, $\{5,6,8,9\}, \{6,7,8,9\}$.
- De cinco elementos: $\{5,6,7,8,9\}$.

El número de subconjuntos de U es $2^5 = 32$.

Todo conjunto tiene dos **subconjuntos propios**: El vacío y él mismo.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Describir por extensión el conjunto A formado por los números enteros cuyo valor absoluto es menor que 6.

Ejercicio 2: ¿Es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ el conjunto del ejercicio anterior?

Ejercicio 3: Si B es el conjunto de números solución de la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$, ¿se verifica $B \subset A$?

Ejercicio 4: ¿Es cierto que $A \subset A$?

Ejercicio 5: ¿Cuántos subconjuntos tiene A?

Ejercicio 6: ¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de B?

Ejercicio 7: ¿Es $\emptyset$ un subconjunto de A?

Ejercicio 8: ¿Son equivalentes las expresiones $\emptyset \in A$ y $\emptyset \subset A$?

Ejercicio 9: ¿Es cierto que ningún conjunto puede tener un subconjunto sin elementos?

Ejercicio 10: ¿Cuántos subconjuntos de A tienen 9 elementos?

Soluciones

Solución 1: $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución 2: No, sobran 6 y -6.

Solución 3: No, $6 \in B$ pero $6 \notin A$.

Solución 4: Sí.

Solución 5: $2^{11} = 2048$.

Solución 6: $2^2 = 4$.

Solución 7: Sí.

Solución 8: No, en el primer caso $\emptyset$ es un elemento de A, en el segundo es un subconjunto.

Solución 9: No.

Solución 10: Combinaciones de 11 elementos tomadas de 9 en 9, es decir 110.

3.3. Ficha 3: Operaciones con conjuntos

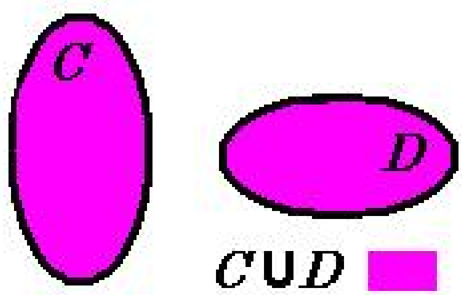
Entre los conjuntos se pueden definir muchas operaciones, las más frecuentes son:

- **Unión de los conjuntos** C y D**.** Se escribe $C \cup D$.
  Es el conjunto formado por los elementos que están en C **o** en D **o en ambos**, es decir:

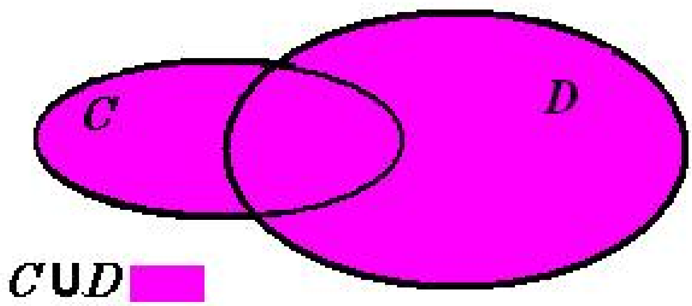
  $$C \cup D = \{x \mid x \in C \ \text{ó} \ x \in D\}$$

  En los diagramas siguientes la parte coloreada corresponde a $C \cup D$ en las distintas situaciones:

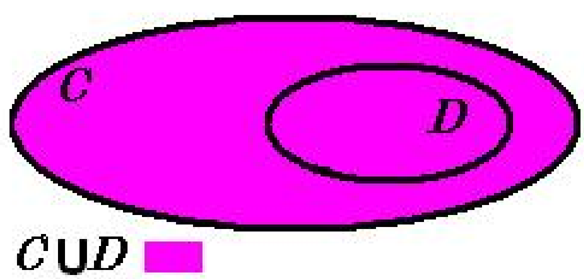
  - Cuando los conjuntos dados no tienen elementos comunes:



- Cuando los conjuntos dados tienen elementos comunes:



- Cuando D está contenido en C:

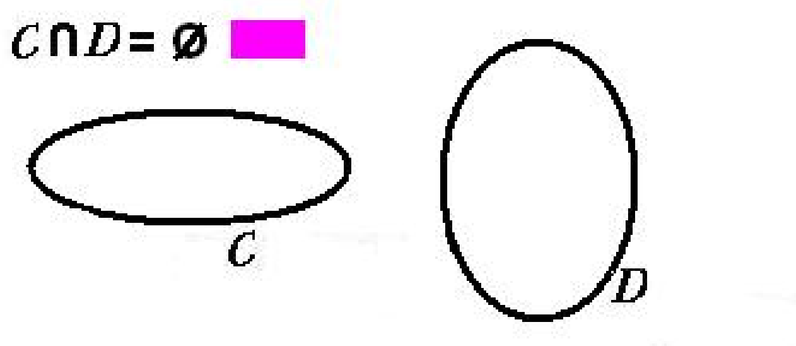


- **Intersección de los conjuntos** C y D. Se escribe $C \cap D$. Es el conjunto formado por los elementos que están en C **y** en D, es decir:

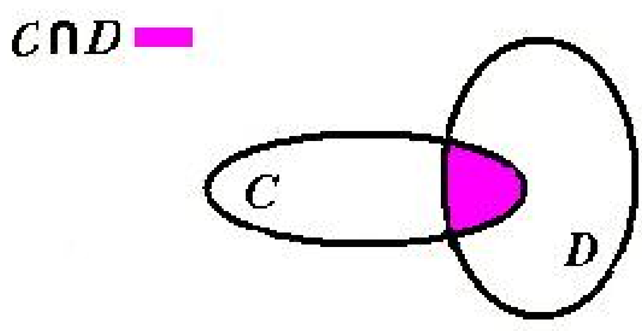
$$C \cap D = \{x \mid x \in C \ y \ x \in D\}$$

En los diagramas siguientes la parte coloreada corresponde a $C \cap D$ en los distintos casos:

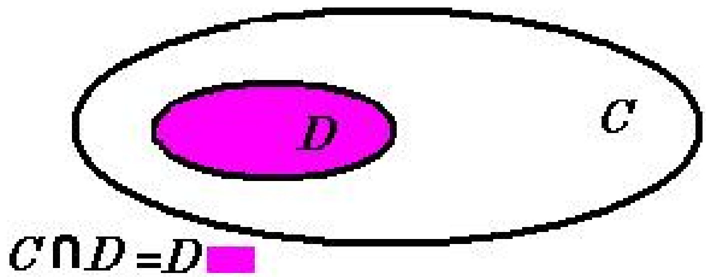
  - Cuando los conjuntos dados son conjuntos **disjuntos**, es decir, su intersección es vacía:



  - Cuando los conjuntos dados tienen algún elemento común:



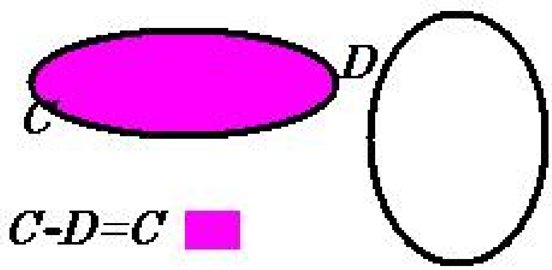
- Cuando D está contenido en C:



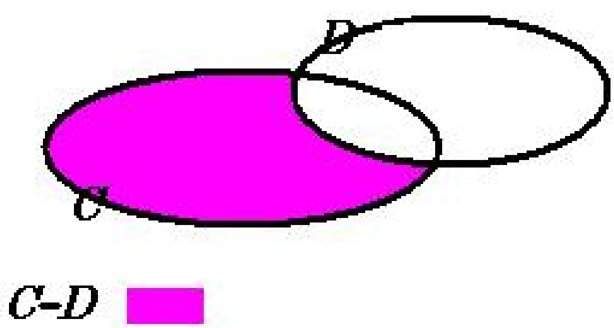
- **Diferencia de los conjuntos** C y D**.** Se escribe $C - D$. Es el conjunto formado por los elementos que están en C y no están en D, es decir:

$$C - D = \{x \mid x \in C \text{ y } x \notin D\}$$

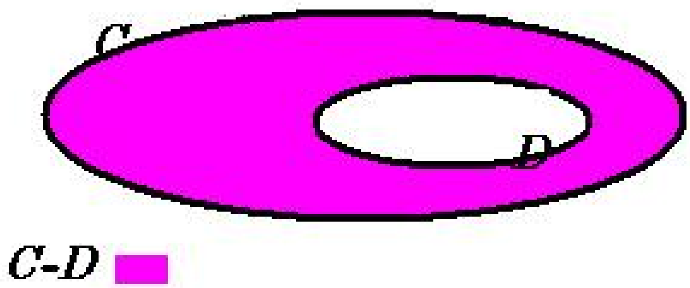
  - Cuando los conjuntos dados son **disjuntos**:



  - Cuando los conjuntos dados tienen algún elemento común:



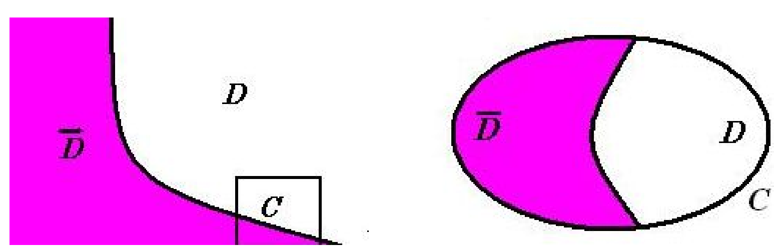
- Cuando uno de los conjuntos dados está contenido en el otro:



Cuando el referencial es C, $C - D$ es el **complementario** de D en C. Se escribe $\overline{D}$.

Es el conjunto formado por los elementos de C que no están en D, es decir:

$$\overline{D} = \{x \mid x \in C \text{ y } x \notin D\}.$$

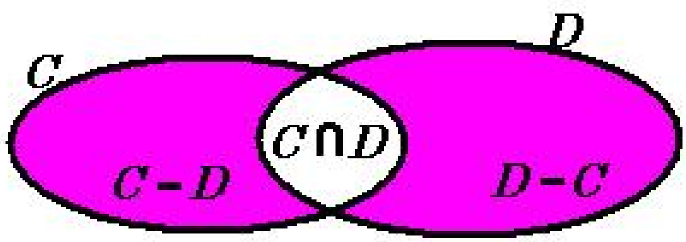


- **Diferencia simétrica** es la unión de los dos conjuntos diferencia, es decir:

$$\begin{aligned} C \triangle D &= (C - D) \cup (D - C) \\ &= \{x | x \in C - D \text{ ó } x \in D - C\} \end{aligned}$$

Observando el diagrama, vemos que está formada por los elementos de la unión que no están en la intersección:

$$C \triangle D = \{x \mid x \in (C \cup D) - (C \cap D)\}$$



Cuando los conjuntos C y D son finitos se puede contar el número de elementos que tienen, siendo evidente la relación:

Núm de elementos de $(C \cup D)$=
Núm de elementos de C+**Núm de elementos de**$D-$
-**Núm de elementos de** $C \cap D$.

Ejemplo 7: Volvamos al ejemplo 5 y sean $C = \{v, a, r\}$ y $D = \{a, l, r\}$, manteniendo $U = \{v, a, l, o, r\}$ como conjunto referencial.

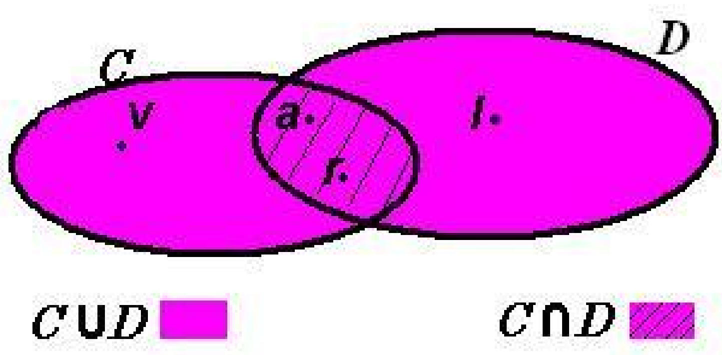
- Los objetos matemáticos entre los que vamos a efectuar las operaciones son los 32 elementos de $P(U)$ (partes de U) que describimos en el ejemplo 5.
- Unión :

$$C \cup D = \{v, a, l, r\}$$

- Intersección:

$$C \cap D = \{a, r\}$$

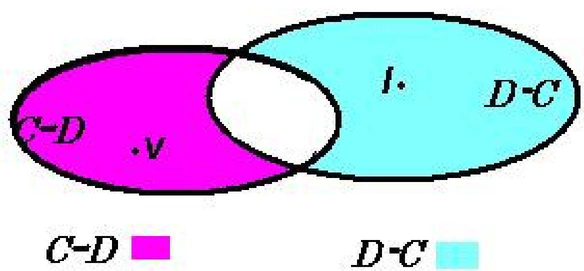
- $C \cap D \neq \emptyset$, por tanto C y D no son conjuntos disjuntos.



Ejemplo 8: **Diferencias** entre los conjuntos C y D del ejemplo 7.

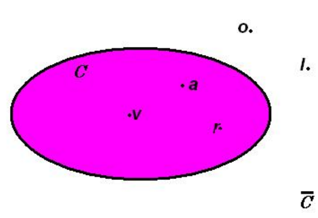
- Hay dos **conjuntos diferencia**:

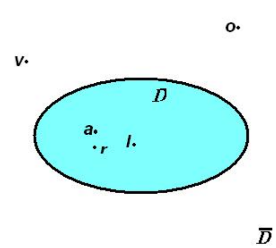
$$C - D = \{v\}; \qquad D - C = \{l\}$$



- Respecto al referencial U se pueden formar los dos conjuntos complementarios:
  Complementario de C: Está formado por los elementos de U que no están en C.
  Complementario de D: Está formado por los elementos de U que no están en D.

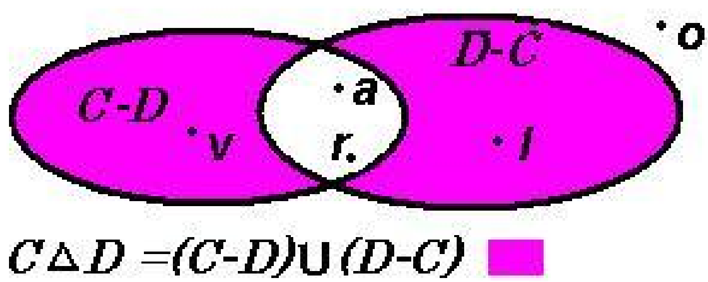
$$\overline{C} = \{l, o\}; \qquad \overline{D} = \{v, o\}$$





- **Diferencia simétrica**:

$$C \triangle D = (C - D) \cup (D - C) = \{v, l\}$$



- **Es evidente que se verifica la relación** $4 = 3 + 3 - 2$:

Número de elementos de $(C \cup D)$=
Número de elementos de C+ Número de elementos de $D-$
Número de elementos de $C \cap D$

Ejemplo 9: Sean A el conjunto de enteros positivos mayores que 2 y menores que 6 y B el conjunto de números impares positivos de un sólo dígito.

- Descripción por comprensión:

$$A = \{x \mid x \text{ son enteros positivos tales que } 2 < x < 6\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ son impares positivos de un sólo dígito}\}$$

- Descripción por extensión:

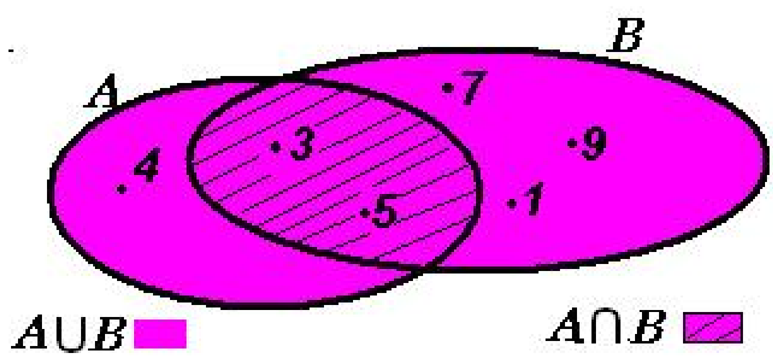
$$A = \{3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- Unión:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

- Intersección:

$$A \cap B = \{3, 5\}$$



Ejemplo 10: Otras operaciones entre los conjuntos del ejemplo 9.

- Diferencias

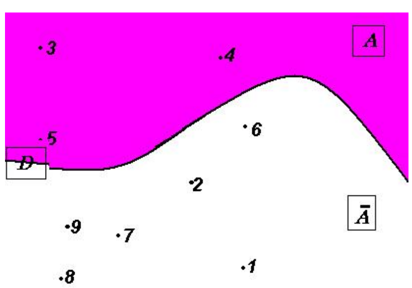
$$A - B = \{4\}; \qquad B - A = \{1, 7, 9\}$$

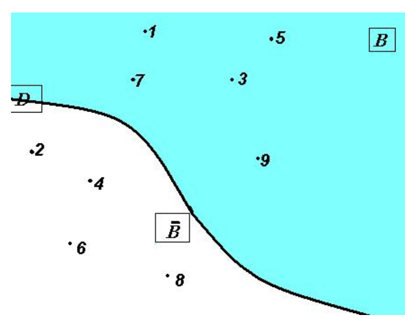
- Complementario de $A, \overline{A}$, y complementario de $B, \overline{B}$.

  A y B son subconjuntos de diferentes conjuntos, su complementario depende del referencial elegido, que puede ser cualquier conjunto que los contenga.

  Si tomamos como referencial $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ los complementarios de A y B son:

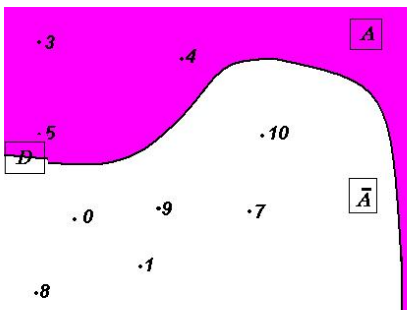
$$\overline{A} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}; \qquad \overline{B} = \{2, 4, 6, 8\}$$

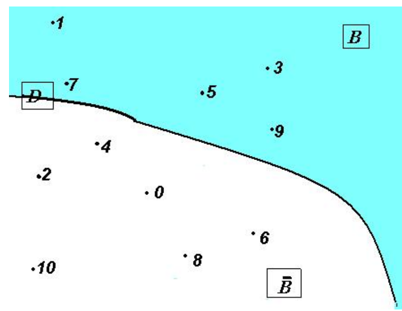




- Si tomamos como referencial $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, los complementarios de A y B son:

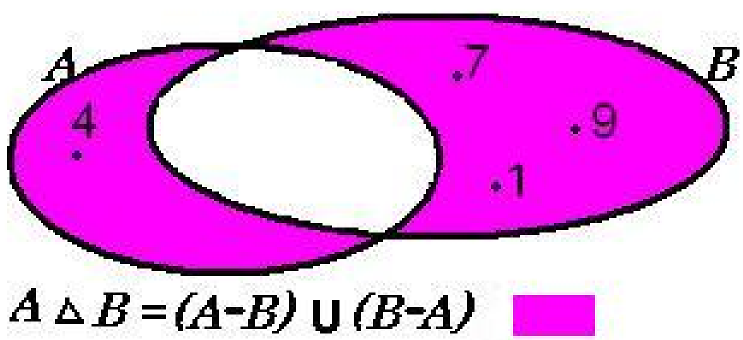
$$\overline{A} = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}; \qquad \overline{B} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$





- Diferencia simétrica:

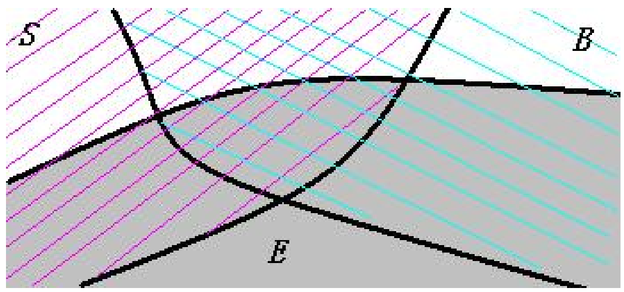
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{4\} \cup \{1, 7, 9\} = \{1, 4, 7, 9\}$$
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 4, 7, 9\}$$



Ejemplo 11: En la ficha de cada trabajador de una empresa figura si es soltero, si tiene estudios de Bachillerato y si es español.

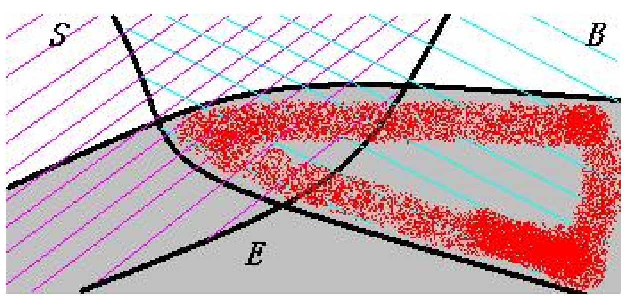
- El referencial es $U = \{x \mid x \text{ son trabajadores de la empresa}\}$

$$S = \{x \mid x \text{ son trabajadores solteros de la empresa}\}$$
$$B = \{x|x \text{ son trabajadores bachilleres de la empresa}\}$$
$$E = \{x \mid x \text{ son trabajadores españoles de la empresa}\}$$

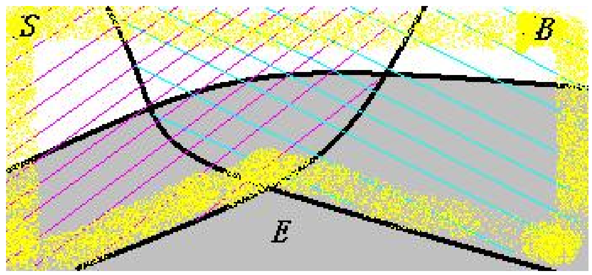


Con los conjuntos S, B, E se pueden hacer las operaciones que conocemos. Los distintos resultados quedan representados en un diagrama. Por ejemplo:

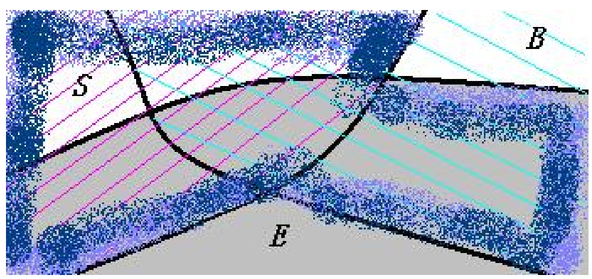
- $B \cap E$: Sus elementos son "*Trabajadores bachilleres españoles de la empresa.*"



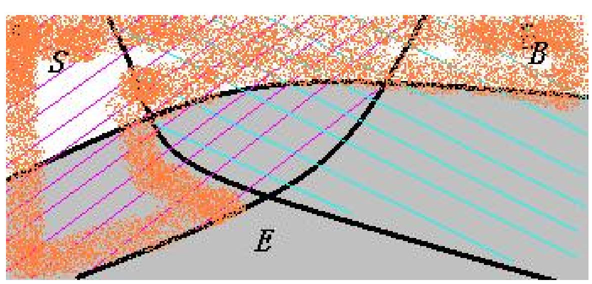
- $S \cup B$: Sus elementos son "*Trabajadores de la empresa solteros o con estudios de Bachillerato.*"



- $S \cup (B \cap E)$: Sus elementos son "*Trabajadores de la empresa solteros o trabajadores de la empresa españoles con estudios de Bachillerato.*"



- $(S \cup B) - (B \cap E)$: Sus elementos son "*Trabajadores de la empresa solteros o con estudios de Bachillerato que no sean españoles con estudios de bachillerato.*"



Autoevaluación ficha 3

Sabiendo que A es el conjunto de números enteros cuyo valor absoluto es menor que 3 y B es el conjunto de números solución de la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$, responda a las siguientes cuestiones:

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 6\}$.	**Verdadero**	**Falso**
$B \subset A \cup B$ y $A \subset A \cup B$.	**Verdadero**	**Falso**
A y B son disjuntos.	**Verdadero**	**Falso**
$A \cap B = \{-2, 6\}$.	**Verdadero**	**Falso**
$A - B = \{2, 1, 0, -1\}$.	**Verdadero**	**Falso**
$B - A = \{6\}$.	**Verdadero**	**Falso**
Si se toma como referencial $A \cup B$, el complementario de B es A.	**Verdadero**	**Falso**
$A \triangle B = \{-1, 0, 1, 2, 6\}$	**Verdadero**	**Falso**
$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$	**Verdadero**	**Falso**
$(A \cap B) \cup (B - A) = A$.	**Verdadero**	**Falso**

3.4. Ficha 4: Correspondencia entre dos conjuntos

- Se llama **producto cartesiano** de los conjuntos A y B al conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar siendo el primer elemento del par de A y el segundo de B.

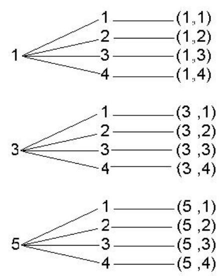
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

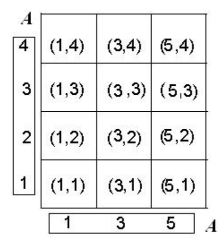
- Con cada elemento de A se pueden formar tantos pares como elementos tenga B, por tanto el **número de elementos de $A \times B$** es el número de elementos de A por el número de elementos de B.
- Cualquier parte de $A \times B$ establece una correspondencia entre estos dos conjuntos. El conjunto de pares que la forman se llama **grafo**.
- Una **correspondencia**, f, entre A y B es un subconjunto de $A \times B$, es decir: $f \subset A \times B$.
- En una correspondencia de A en B el conjunto A se llama **conjunto inicial**.
- El subconjunto de A que interviene en f se llama **conjunto original** de la correspondencia.
- En una correspondencia de A en B el conjunto B se llama **conjunto final**.
- El subconjunto de B que interviene en f se llama **conjunto imagen** de la correspondencia.
- Las correspondencias, f, entre A y B que tienen la característica de que cada elemento de A está sólo en un par de f reciben el nombre de **aplicaciones**.

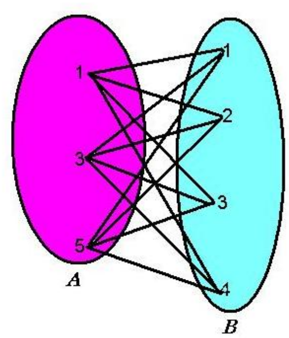
Ejemplo 12: Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ su producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),\\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

- $A \times B$ se puede representar mediante **diagramas** como:







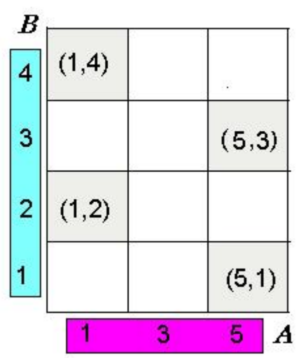
- Número de elementos (pares) de $A \times B = 3 \cdot 4 = 12$.

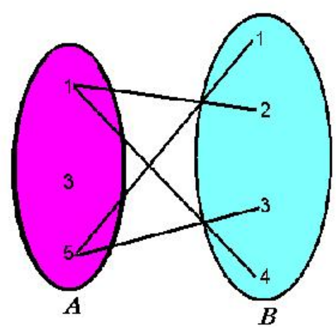
Ejemplo 13: Si A y B son los conjuntos del ejemplo 12, $f = \{(1,2),(1,4),(5,1),(5,3)\}$ es un subconjunto de $A \times B$ que establece una correspondencia entre A y B.

- Los pares de $A \times B$ que aparecen resaltados forman f:

$$\{(1,1), \boldsymbol{(1,2)}, (1,3), \boldsymbol{(1,4)}, (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \boldsymbol{(5,1)}, (5,2), \boldsymbol{(5,3)}, (5,4)\}$$

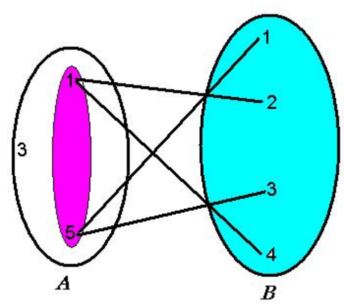
- f es un conjunto descrito por extensión que se puede representar mediante **diagramas** como:





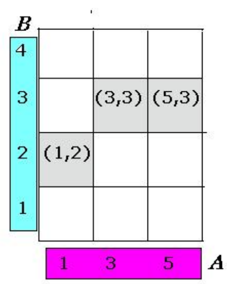
Ejemplo 14: En la correspondencia f del ejemplo 13 intervienen el subconjunto $\{1, 5\}$ de A y el subconjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ de B y se verifica:

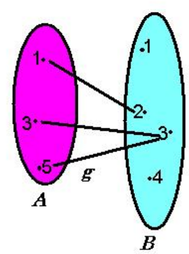
- El conjunto inicial es A.
- El conjunto original es $\{1, 5\} \subset A$.
- El conjunto final es B.
- El conjunto imagen es B.



Ejemplo 15: Ejemplo de aplicación:

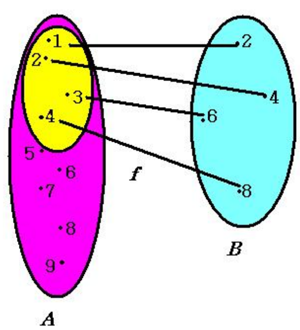
- La correspondencia $g = \{(1,2),(3,3),(5,3)\}$, definida entre los conjuntos A y B del ejemplo 12 tiene la característica de que cada elemento de A sólo está como primer elemento en un par de g.
- La correspondencia g sí es aplicación.
- La correspondencia f del ejemplo 13 no es una aplicación.





Ejemplo 16: Si A es el conjunto de números enteros positivos menores que 10, B es el conjunto de números enteros positivos pares menores que 10, y f la correspondencia de A en B que asigna su doble a cada elemento de A verifica:

- El **conjunto inicial** en la correspondencia f es A.
- El **conjunto original** en la correspondencia f es: $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$.
- El **conjunto final** en la correspondencia f es B.
- El **conjunto imagen** en la correspondencia f coincide con B.
- $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$



Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Describir por extensión el conjunto $A \times B$ siendo $A = \{casa, el, imagen\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 2: ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

Ejercicio 3: La correspondencia f, entre los conjuntos A y B del ejercicio 1 anterior, que asigna a cada elemento de A el número de vocales que tiene. ¿Por cuántos pares está formada?

Ejercicio 4: ¿Es la correspondencia f una aplicación?

Ejercicio 5: ¿Coinciden en esta correspondencia los conjuntos inicial y original?

Ejercicio 6: ¿Coinciden en esta correspondencia los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 7: ¿Se puede establecer una correspondencia g, entre los mismos conjuntos A y B para que coincidan los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 8: ¿Y una aplicación para que coincidan los conjuntos final e imagen?

Ejercicio 9: ¿Es cierto que el conjunto imagen está contenido siempre en el conjunto final?

Ejercicio 10: ¿Puede ocurrir que el conjunto inicial no contenga al conjunto original?

Soluciones

Solución 1:
$A \times B = \{(casa, 1), (casa, 2), (casa, 3), (casa, 4), (el, 1), (el, 2), (el, 3), (el, 4), (imagen, 1), (imagen, 2), (imagen, 3), (imagen, 4)\}$.

Solución 2: 12 elementos.

Solución 3: Por tres pares de $A \times B$.

Solución 4: Sí.

Solución 5: Sí.

Solución 6: No.

Solución 7: Sí: $g = \{(casa, 1), (casa, 2), (el, 1), (imagen, 3)\}$.

Solución 8: No.

Solución 9: Sí.

Solución 10: No.

Autoevaluación ficha 4

Sabiendo que $A = \{\text{padre, hija, casilla, cosa}\}$, B es el conjunto de vocales del alfabeto español y f la correspondencia de A en B que asigna a cada palabra una vocal de B si contiene dicha vocal, responda a las siguientes cuestiones:

$A \times B = B \times A$.	**Verdadero**	**Falso**
El número de elementos de $A \times B$ es 16.	**Verdadero**	**Falso**
$f \subset A \times B$.	**Verdadero**	**Falso**
$A \times B \subset f$.	**Verdadero**	**Falso**
El grafo de f tiene 8 elementos.	**Verdadero**	**Falso**
(i,hija) es un elemento de f.	**Verdadero**	**Falso**
El conjunto inicial y conjunto original de f coinciden.	**Verdadero**	**Falso**
El conjunto final y conjunto imagen de f coinciden.	**Verdadero**	**Falso**
f es una aplicación.	**Verdadero**	**Falso**
f no es una aplicación porque ninguna de las palabras contiene la vocal "u".	**Verdadero**	**Falso**

3.5. Ficha 5: Relaciones binarias

Entre los elementos de un conjunto se pueden establecer relaciones binarias.

- Una **relación binaria**, R, en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times A$.

- Si (a, b) está en R, siendo a y b elementos de A, diremos que a **está relacionado** con b mediante la relación R.
  Con frecuencia las relaciones tienen alguna de las siguientes propiedades:

- Una relación R es **reflexiva** en un conjunto A si cada uno de sus elementos está relacionado consigo mismo:

$$aRa, \forall a \in A$$

  Si R es reflexiva en A cada elemento de su gráfico de flechas tiene un bucle.

- Una relación R es **antirreflexiva** en un conjunto A si ninguno de sus elementos está relacionado consigo mismo, es decir:

$$a \text{ no está relacionado con } a \text{ para ningún } a \in A$$

  Si R es antirreflexiva en A ningún elemento de su gráfico de flechas tiene un bucle.

- Una relación R es **simétrica** en un conjunto A si ocurre:

$$aRb \Rightarrow bRa, \forall a, b \in A$$

  Si R es simétrica en A cada flecha de ida va acompañada por la correspondiente de vuelta en el gráfico de flechas.

- Una relación R es **antisimétrica** en un conjunto A si:

  Cuando a está relacionado con b, b no está relacionado con a si $a \neq b, a, b \in A$.

  Si R es antisimétrica en A ninguna flecha de ida puede estar acompañada de otra de vuelta en su gráfico de flechas.

- Una relación R es **transitiva** en un conjunto A si ocurre:

  $$\text{Si } aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc,\ \forall a, b, c \in A$$

- Una relación R es de **equivalencia** en un conjunto A si es:

  reflexiva, simétrica y transitiva

- Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, éste se puede dividir en conjuntos disjuntos tales que cada uno está formado sólo por elementos que están relacionados y se llama **clase de equivalencia**.

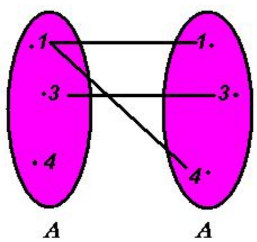
- El conjunto de las clases de equivalencia que ha determinado la relación R en el conjunto A se llama **conjunto cociente**: A/R.

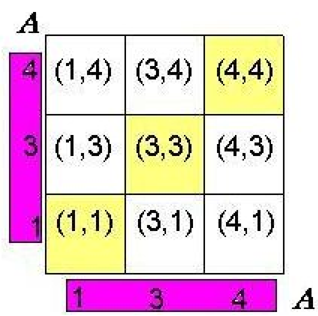
- Una relación R es de **orden** en un conjunto A si es:

  reflexiva, antisimétrica y transitiva

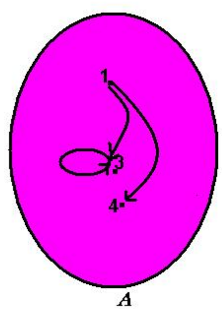
Ejemplo 18: Sean $A = \{1, 3, 4\}$ y R el subconjunto de $A \times A$, $R = \{(1, 3), (3, 3), (1, 4)\}$.

- Los pares de R indican que 1 está relacionado con 3 y con 4, y 3 está relacionado con 3.
- Es lo mismo que decir que hay una correspondencia entre A y A donde 1 tiene por imágenes 3 y 4, y la imagen e 3 es 3.





- Por ser iguales los conjuntos inicial y final también se puede utilizar el siguiente diagrama:



Ejemplo 19: Sean $A = \{uno, dos, tres, eva\}$ y R la relación definida en A: "*tiene el mismo número de letras*".

- Los pares que forman la relación R son:

$$\{(uno,uno),(uno,dos),(uno,eva),\ (dos,uno),(dos,dos),$$
$$(dos,eva),(eva,uno),(eva,dos),(eva,eva),(tres,tres)\}$$

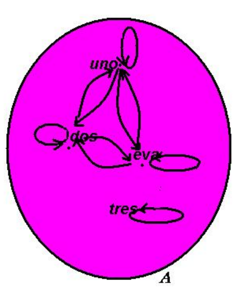
- R **es reflexiva en** A:
Los pares *(uno,uno),(dos,dos),(eva,eva),(tres,tres)* son de R.
En su gráfico de flechas cada elemento tiene un bucle.

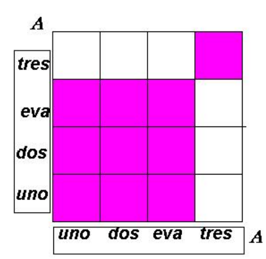
- R **es simétrica en** A:
Son de R los pares
(uno,dos) y *(dos,uno)*; *(uno,eva)* y *(eva,uno)*; *(dos,eva)* y *(eva,dos)*
En su gráfico de flechas, éstas van en parejas de ida y vuelta.

- R **es transitiva en** A:

$$(uno,dos),(dos,eva) \in R \Rightarrow (uno,eva) \in R$$
$$(dos,eva),(eva,\ uno) \in R \Rightarrow (dos,uno) \in R$$

....





Ejemplo 20: La relación R "*tener el mismo número de letras*" en el conjunto del ejemplo anterior verifica:

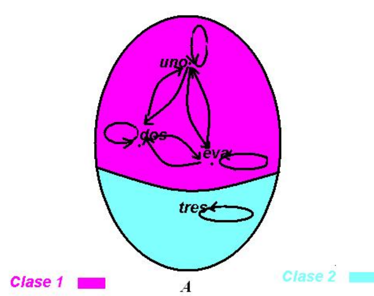
- La relación R en A es de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva.
- Por ser R de equivalencia se puede dividir A en las siguientes clases:

$$\textit{Clase 1}=\{uno, dos, eva\}$$
$$\textit{Clase 2}=\{tres\}$$

Clase 1 está formado por los elementos de A que tienen tres letras.
Clase 2 está formado por los elementos de A que tienen cuatro letras.

- El conjunto cociente determinado en A por R es

$$A/R = \{\textit{Clase 1},\ \textit{Clase 2}\}$$



Observación: Hay relaciones que no tienen ninguna de las propiedades citadas.

Ejemplo 21: Sea A la familia formada por $\{abuelo\ paterno, padre, madre, hijo1, hijo2\}$ en la que se define la relación R, "*es padre de*".

- Los pares que forman la relación R son:

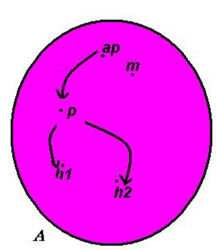
  {*(abuelo paterno, padre),(padre, hijo1),(padre, hijo2)*}

- R **es antirreflexiva en** A:
  En ningún par de R pueden ser iguales el primero y el segundo elementos.
  En su gráfico de flechas ningún elemento tiene un bucle.

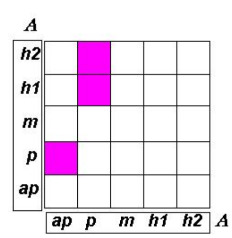
- R **es antisimétrica en** A:
  Por ser *(abuelo paterno, padre),(padre, hijo1),(padre, hijo2)* de R, no pueden serlo *(padre, abuelo paterno),(hijo1, padre),(hijo2, padre,)*, respectivamente.
  En su gráfico de flechas, no hay ninguna pareja de ida y vuelta.

- R **es no es transitiva en** A:

  (abuelo paterno, padre),(padre, hijo1) son de R, pero *(abuelo paterno, hijo1)* no puede serlo.



ap: abuelo paterno; p: padre; m: madre; h1: hijo 1; h2: hijo 2



ap: abuelo paterno; p: padre; m: madre; h1: hijo 1; h2: hijo 2

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: ¿Es de equivalencia la relación R:"*tener igual el primer apellido*" en el conjunto A de las personas inscritas en el Registro Civil como nacidas en Madrid el día 20 de abril de 2000?

Ejercicio 2: ¿Pertenecen todos los elementos de A a alguna clase de equivalencia?

Ejercicio 3: Describa la clase a que pertenece Juan Pérez García sabiendo que pertenece al conjunto A.

Ejercicio 4: ¿Hay alguna clase de equivalencia que no tenga ningún elemento?

Ejercicio 5: ¿Tienen todas las clases el mismo número de elementos?

Ejercicio 6: ¿En qué se diferencia un elemento del conjunto cociente de otro?

Ejercicio 7: ¿Es R una relación de orden?

Ejercicio 8: ¿Se puede definir en un conjunto una relación simétrica y antisimétrica simultáneamente?

Ejercicio 9: Defina en el mismo conjunto una relación de orden.

Ejercicio 10: La relación que ha definido en el ejercicio 9, ¿permite formar clases de equivalencia en A?

Soluciones

Solución 1: Sí.

Solución 2: Sí.

Solución 3: *Clase Pérez*= {*personas cuyo primer apellido es Pérez* y están inscritas en el Registro Civil como nacidas en Madrid el 20 de abril de 2000 }?.

Solución 4: No.

Solución 5: No.

Solución 6: En el primer apellido de las personas que la forman.

Solución 7: No.

Solución 8: No.

Solución 9: "*haber nacido antes*".

Solución 10: No.

Autoevaluación ficha 5

Sabiendo que en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ se define la relación R: "*ser múltiplo de*", responda a las siguientes cuestiones:

R es reflexiva.	**Verdadero**	**Falso**
El número de pares que forman R es 13.	**Verdadero**	**Falso**
R es simétrica.	**Verdadero**	**Falso**
R es $A \times A$.	**Verdadero**	**Falso**
R es transitiva.	**Verdadero**	**Falso**
R es una relación de equivalencia.	**Verdadero**	**Falso**
R es una relación de orden.	**Verdadero**	**Falso**
La relación R divide el conjunto dado en clases de equivalencia .	**Verdadero**	**Falso**
Conjunto cociente es un conjunto de clases de equivalencia.	**Verdadero**	**Falso**
Una relación puede ser de orden y de equivalencia simultáneamente.	**Verdadero**	**Falso**

SÍMBOLOS MÁS UTILIZADOS EN ESTE MÓDULO

$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\in$	Pertenece
$\{x/x \in A\}$	El conjunto de los elementos x que pertenecen a A
$\subset$	Contenido
$\emptyset$	Conjunto vacío
$A \cup B$	Unión de conjuntos
$A \cap B$	Intersección de conjuntos
$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^+$	El conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{Z}^-$	El conjunto de los números enteros negativos
$\mathbb{Q}$	El conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales

Índice alfabético