CURSOS 0
MATEMÁTICAS

Trigonometría

José Ignacio Alonso Tosca
Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales

UNED

CURSOS 0

Índice general

1. Introducción y objetivos

En este capítulo nos proponemos refrescar los conceptos y fórmulas trigonométricas que consideramos pueden ser útiles de manera inmediata para su utilización en distintos momentos en las asignaturas de Cálculo de una y varias variables de los primeros cursos de Ingeniería o Ciencias.

De ningún modo se trata de repetir un capítulo completo de trigonometría plana, ni siquiera nos ocuparemos de la resolución de triángulos que es el fin fundamental de esta rama de las matemáticas, para eso están los textos de bachillerato y hay abundantes materiales en Internet de acceso libre y de calidad excelente, se trata solo de interesarnos por algunos conceptos y fórmulas que aparecen en Cálculo y que necesitaremos de manera auxiliar.

1.1. Objetivos

Los objetivos que nos proponemos son:

1 Recordar la medida de ángulos en grados sexagesimales y radianes, así como la relación que existe entre ellas

2 Recordar la definición de las distintas razones trigonométricas

3 Recordar las identidades mas relevantes.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

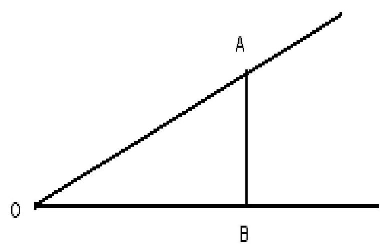
$\frac{\pi}{6}$ radianes $= 30^0$	**Verdadero**	**Falso**
Razonando sobre un triángulo equilátero, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$	**Verdadero**	**Falso**
Si $\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces $\operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{4}$	**Verdadero**	**Falso**
Utilizando un cuadrado, $\cos 45^o = \frac{1}{2}$	**Verdadero**	**Falso**
$\operatorname{sen} 105^0 = \operatorname{sen} 60^0 + \operatorname{sen} 45^0$	**Verdadero**	**Falso**
$\operatorname{sen} x \cos 3x = \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 4x}{2}$	**Verdadero**	**Falso**
$\cos x \cos 3x = \frac{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x}{2}$	**Verdadero**	**Falso**
$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{2}$	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido dificultades debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encuentre a continuación.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Definición de las razones trigonométricas de un ángulo

Considerando el ángulo como la región plana contenida entre dos semirectas con origen común O, podemos costruir un triángulo rectángulo, trazando desde cualquier punto A de una de ellas, una perpendicular a la otra. Al cociente de la medida de ese cateto AB, que acabamos de trazar, entre la medida de la hipotenusa OA, se le llama seno del ángulo $\widehat{AOB}$ y se escribe $\operatorname{sen}\widehat{O}$.



$$\operatorname{sen}\widehat{O} = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{|AB|}{|OA|}$$

Es fácil observar en la figura, que si consideramos el ángulo $\widehat{OAB}$, complementario de $\widehat{AOB}$, su seno viene dado por

$$\frac{|OB|}{|OA|};$$

por eso a esta razón se le llama coseno del ángulo $\widehat{O}$, que quiere decir "seno del complementario" de $\widehat{O}$; así pués:

$$\cos\widehat{O} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{|OB|}{|OA|}$$

En virtud de la relación pitagórica entre los lados de un triángulo rectángulo se cumple:

$$\operatorname{sen}^2 \widehat{O} + \cos^2 \widehat{O} = 1$$

La razón trigonométrica que mejor caracteriza a un ángulo es la tangente, que se define como:

$$\operatorname{tg} \widehat{O} = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{O}}{\cos \widehat{O}}$$

Las razones inversas de las anteriores se denominan:
secante de $\widehat{O}$,

$$\sec \widehat{O} = \frac{1}{\cos \widehat{O}},$$

cosecante de $\widehat{O}$,

$$\operatorname{cosec} \widehat{O} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{O}}$$

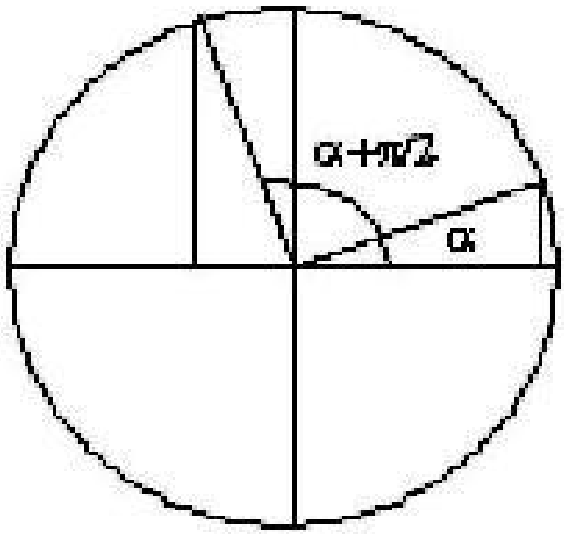
y cotangente de $\widehat{O}$,

$$\operatorname{cotg} \widehat{O} = \frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{O}} = \frac{\cos \widehat{O}}{\operatorname{sen} \widehat{O}}.$$

Para extender la definición de las razones trigonométricas a ángulos mayores de 90º, utilizaremos el círculo trigonométrico, que tiene de radio la unidad, y un sistema de ejes coordenados cartesianos rectangulares con origen en el centro de la circunferencia.

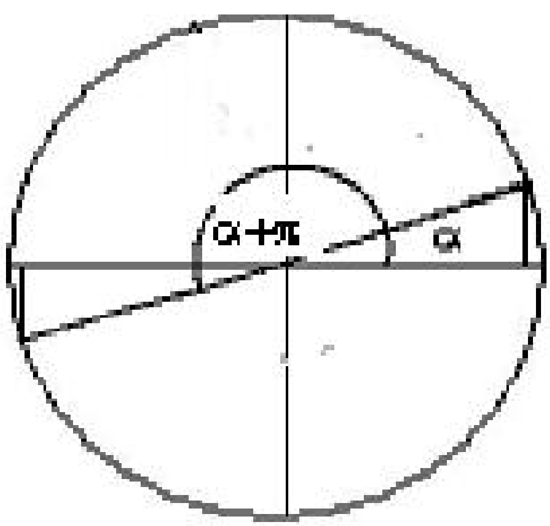
Es inmediato comprobar la relación que hay entre las razones trigonométricas de ángulos en el primer cuadrante y en los otros tres.

Los ángulos del segundo cuadrante se pueden expresar como suma de un ángulo del primer cuadrante mas $\pi/2$



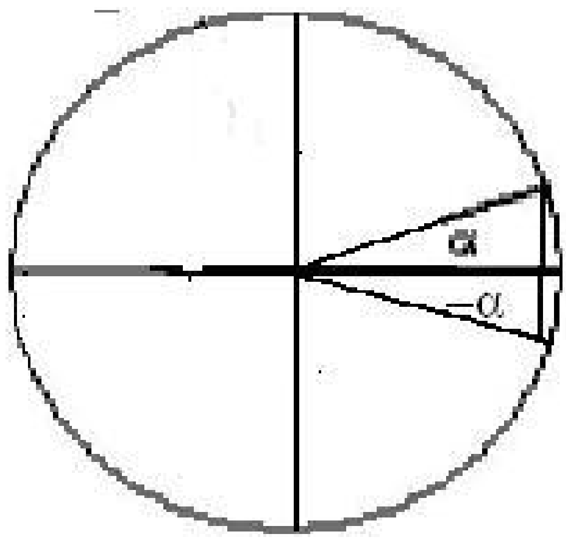
$$\operatorname{sen}\alpha = -\cos\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Vamos a expresar la relación entre las líneas trigonométricas del primer y tercer cuadrante:



$$\operatorname{sen}\alpha = -\ sen\,(\alpha + \pi)$$
$$\cos\alpha = -\cos\left(\alpha + \pi\right)$$

Para ángulos del cuarto cuadrante podemos utilizar la simetría de la figura respecto al eje OX



$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}(-\alpha)$$
$$\cos\alpha = \cos(2\pi-\alpha) = \cos(-\alpha)$$

3.2. Ficha 2: Medida de ángulos: Radianes y grados sexagesimales

La manera natural de medir un ángulo es en función de la longitud del arco que intercepta sobre una circunferencia de radio r cualquiera, con centro en su vértice. Así un ángulo cuyos lados definan sobre una circunferencia de radio r un arco de longitud r, tiene una amplitud o medida de 1 radián. El único inconveniente es que el ángulo llano se corresponde con un número irracional de radios,

$$\pi \text{ radianes,}$$

por eso en vez de radianes podemos emplear como nueva unidad de medida los

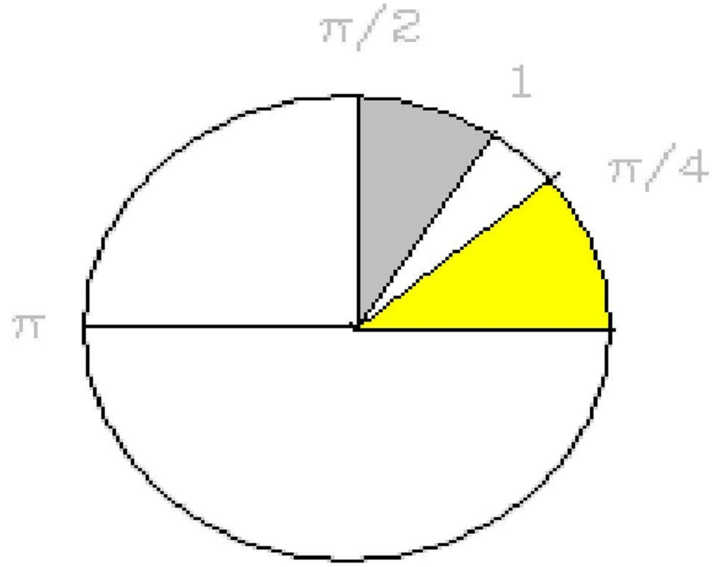
$$\text{“ pi-radianes ”.}$$

La correspondencia con las medidas tradicionales de la trigonometría son inmediatas:

$$180^o = \pi \text{ radianes}$$
$$90^o = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$
$$45^o = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$
$$30^o = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$
$$\vdots$$

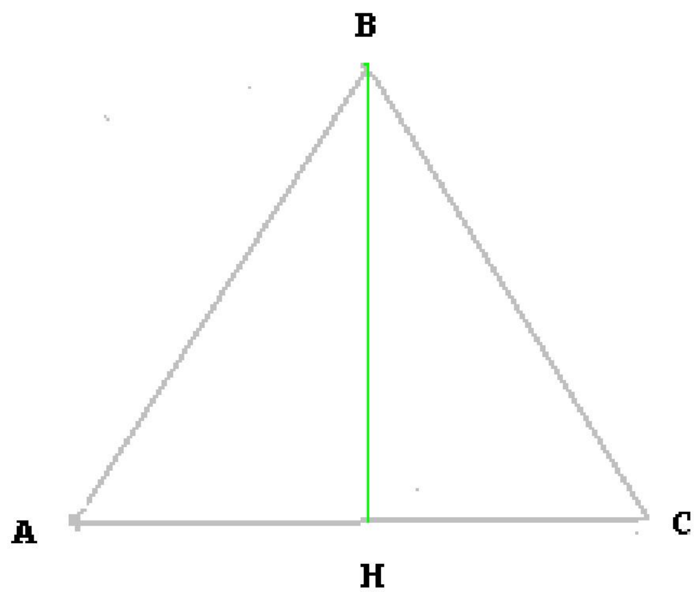
En la siguiente gráfica se ilustran los valores aproximados de

$$\frac{\pi}{4},\ 1,\ \frac{\pi}{2},\ \text{ y } \pi \text{ radianes.}$$


π/2
1
π/4
π

3.3. Ficha 3: Cálculo de algunas razones trigonométricas

Cálculo de las razones trigonométricas del ángulo de 60^o, sobre un triángulo equilátero.



Según la definición dada anteriormente:

$$\cos \widehat{A} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$$

como

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

y

$$\overline{AC} = \overline{AB}$$

resulta

$$\cos \widehat{A} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

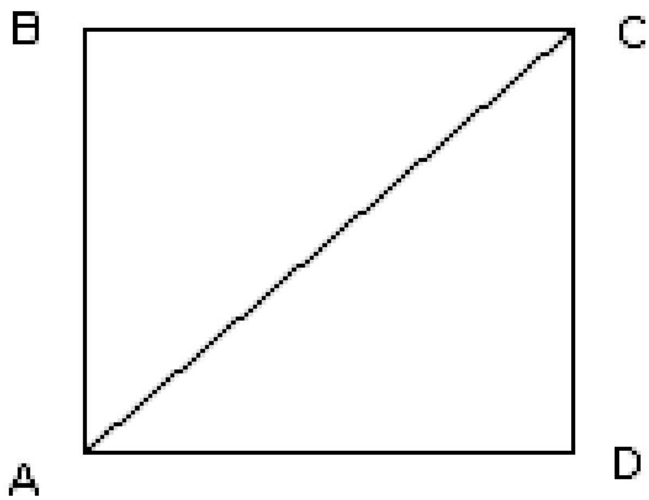
Análogamente, como 30^o es complementario de 60^o, tenemos:

$$\operatorname{sen} 30^o = \cos 60^o$$

y

$$\cos 30^o = \operatorname{sen} 60^o$$

Para calcular las razones trigonométricas de $45^o = \frac{\pi}{4}$ radianes, razonamos sobre un cuadrado de lado l.



$$\overline{AC} = l\sqrt{2}$$
$$\operatorname{sen}\widehat{DAC} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\widehat{DAC} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\operatorname{tg}\widehat{DAC} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{DAC}}{\cos\widehat{DAC}} = 1$$

Las razones trigonométricas de los ángulos mas usuales se pueden resumir en el cuadro siguiente:

	30^o	45^o	60^o	90^o
sen	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Hay que tener en cuenta que los cocientes cuyo denominador sea cero no están definidos. Por eso la tg 90^{o} no existe.

3.4. Ficha 4: Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Recordemos que las razones trigonométricas del ángulo suma o diferencia de otros dos, vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Ejemplo:

$$\operatorname{sen} 105^o = \operatorname{sen}(60+45) =$$

$$\operatorname{sen} 60 \cos 45 + \cos 60 \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}258\,82$$

3.5. Ficha 5: Transformación de productos en sumas

Muy útiles suelen ser, en el cálculo de primitivas trigonométricas, las fórmulas que transforman productos de senos y cosenos de ángulos en sumas y diferencias:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

Sumando miembro a miembro ambas igualdades se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b,$$

llamando $a+b=A$ y $a-b=B$, se obtiene

$$a = \frac{A+B}{2}$$

y

$$b = \frac{A-B}{2}$$

y por sustitución en la igualdad anterior anterior:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

y restando miembro a miembro dichas igualdades:

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Sumando y restando las igualdades:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

se obtiene

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

Es decir, el producto de un “seno por un coseno ” es igual a la mitad “ del seno de la suma más el seno de la diferencia ”

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}{2}$$

Ejemplos:

- $$\mathrm{sen}\,5x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,8x + \mathrm{sen}\,2x\right)$$

  para lo cual hemos llamado $5x = \dfrac{A+B}{2}$ y $3x = \dfrac{A-B}{2}$.

- $$\mathrm{sen}\,3x\cos 5x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,8x + \mathrm{sen}\,(-2x)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,8x - \mathrm{sen}\,2x\right)$$

- $$\cos x\,\mathrm{sen}\,3x = \mathrm{sen}\,3x\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,4x + \mathrm{sen}\,2x\right).$$

Obsérvese, que el primer factor ha de ser el seno y el segundo el coseno.

El producto de "dos cosenos" es igual a la mitad "del coseno de la suma más el coseno de la diferencia "

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Ejemplo:

$$\cos 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$$

El producto de "dos senos" es igual a la mitad "del coseno de la diferencia menos el coseno de la suma"

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Ejemplo:

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x).$$

3.6. Ficha 6: Ejercicios de resolución de ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 1.

$$\cos 2x = \operatorname{sen} x$$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

$1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$,es una ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} x$, cuyas soluciones son:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{ll} 2 & \text{no es válida} \\ -1 & \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.

$$\cos 2x + \sin x = 1$$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

$1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = 0, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}, x = (2k+1)\,\pi - \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

Ejercicio 3.

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{3x}{2} = 0, \cos\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = (2k+1)\,\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 4.

$$2\cos^2 x + \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$\cos x\,(2\cos x + \cos 2x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0, 2\cos x + \cos 2x = 0$

$2\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0;$

$\Rightarrow 2\cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$; reordenando la ecuación:

$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 0{,}366\,03 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = -1{,}366 \end{array} \right.$$

solo es válida la solución positiva, porque la otra solución supera en valor absoluto la unidad, de aquí se obtiene:

$$x = \arccos 0{,}366\,03$$

de $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 5.

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$$

Transformando la suma en producto $2 \operatorname{sen} \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0, x = (2k+1)\pi$

$\operatorname{sen} \frac{5x}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, una solución es que $\dfrac{5x}{2} = \dfrac{x}{2}$,es decir $x = 0$, o que $\dfrac{5x}{2} = (2k+1)\pi - \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)\pi}{3}$

4. Prueba de autoevaluación

Haga el test siguiente de Verdadero o Falso para saber el nivel de conocimientos que tiene en este bloque.

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$	**Verdadero**	**Falso**
$\tan\dfrac{\pi}{3} = \tan\dfrac{2\pi}{3}$	**Verdadero**	**Falso**
$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	**Verdadero**	**Falso**
$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$	**Verdadero**	**Falso**
$\cos^2 x + \cos^2 y = 1 - \cos(x+y)\cos(x-y)$	**Verdadero**	**Falso**

Bibliografía

Cualquiera de los textos aprobados por la Administración competente en Educación para primero de Bachillerato de Ciencias, no obstante pondré algunas direcciones de Internet:

http://w3.cnice.mec.es/Descartes/index.html

http://personales.unican.es/gonzaleof/

www.guiamath.net/Matematica/formularios/web-trig.pdf

http://www.portalplanetasedna.com.ar/geometria1.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/trigonometria.htm