# FACULTAD DE CIENCIAS
# SECCIÓN FÍSICAS
# CURSO CERO

**TÍTULO:** ***Movimiento Curvilíneo***

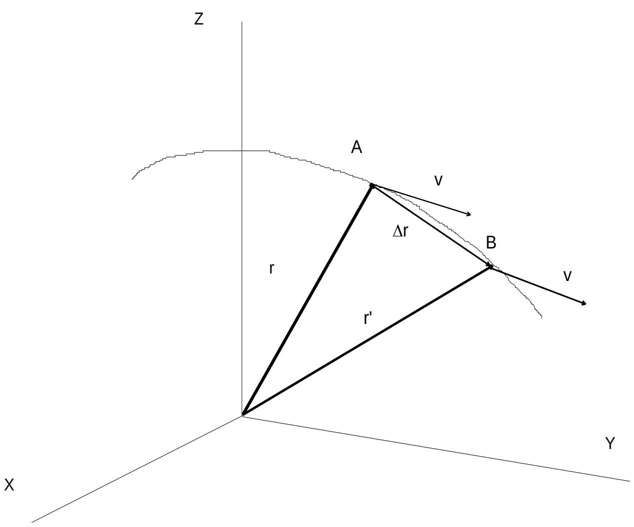
## OBJETIVOS:

- Se estudia la descripción del movimiento de una partícula que describe una trayectoria cualquiera con atención especial al **movimiento circular** (la trayectoria es una circunferencia).

## DESARROLLO CONCEPTUAL

Suponemos una partícula que describe en su trayectoria curvilínea. En el instante *t* se encuentra en el punto *A* y su posición es definida por el vector de posición ***OA***:

**r** = **OA** = x **i** + y **j** + z **k**




en un instante posterior *t'* se encuentra en la posición *B* cuyo vector de posición es ***OB***:

**r** = **OB** = x' **i** + y' **j** + z' **k**

La partícula describe en su movimiento el arco Δ*s* siendo el desplazamiento de la partícula Δ*r* :

Δr = **AB** = r' – r =

= Δx i + Δy j + Δy k

siendo Δx = x' – x , Δy = y' – y ,

Δz = z' – z. Se puede definir la **velocidad media**

$$\mathbf{v_m} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v_m} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

viene representado por un vector paralelo al desplazamiento Δ***r***.

**Velocidad instantánea.-**

La **velocidad instantánea** (en adelante **velocidad**) se puede calcular considerando en la expresión anterior que Δt se hace muy pequeño Δt → 0

$$\mathbf{v} = lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v_m} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \mathbf{t}}$$

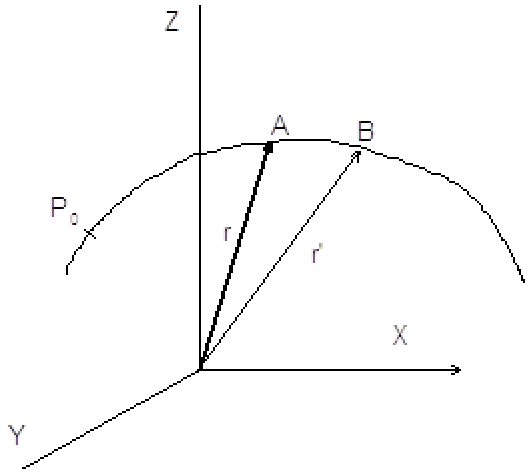
es evidente, que a medida que Δt se aproxima a 0, el punto *B* lo hace al punto *A*, durante este proceso ***AB*** = Δ***r*** se modifica continuamente en magnitud (módulo) y dirección, de manera que cuando *B* se encuentra muy cerca de *A*, el vector Δ***r*** = ***AB*** se confunde con la dirección de la tangente en *A*, por tanto, para un movimiento curvilíneo la velocidad se puede escribir

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

en donde, $v_x = \frac{dx}{dt} \therefore v_y = \frac{dy}{dt} \therefore v_z = \frac{dz}{dt}$ y el módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Supongamos –ver figura adjunta- el punto $O_0$ un punto de referencia arbitrario en la trayectoria descrita por la partícula. Así, $s = O_0A$ expresa la posición de la partícula medida por el desplazamiento a lo *largo de la trayectoria* ( *s* puede ser positiva o negativa según se encuentre a la derecha o izquierda de $O_0$ –analogía con el movimiento rectilíneo-). Según lo dicho, cuando la partícula se mueve desde *A* hasta *B* el desplazamiento Δs coincide con la longitud del arco AB : Δs = arco AB .




Recordando la definición de velocidad resulta (multiplicando y dividiendo por Δs) :

$$\mathbf{v} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

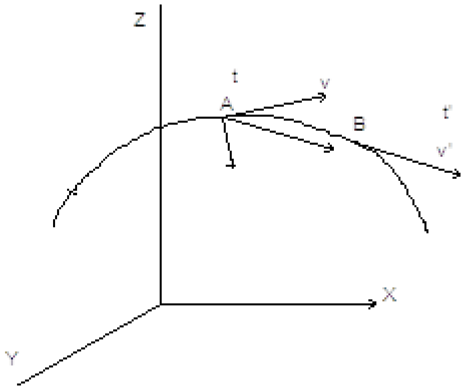
cuando Δs ⟶ 0 la magnitud de Δr es casi igual a la de Δs y, por tanto, $lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}$ representa matemáticamente a un vector de módulo igual a la unidad y dirección tangente a la trayectoria. Es decir,

$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\mathbf{s}} = \mathbf{u}_t$ como $lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ resulta $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{u}_t$

en donde, $\frac{ds}{dt} = v$ el módulo de la velocidad y $\boldsymbol{u}_t$ es un vector unitario que determina su dirección. Se puede concluir que en el movimiento curvilíneo *ds* desempeña el mismo papel que *dx* en el movimiento rectilíneo.

**Aceleración media.-**

En un movimiento curvilíneo la velocidad puede cambiar tanto en magnitud (el módulo puede aumentar o disminuir) como en la dirección ( pues la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta se "curva" continuamente)




Según se muestra en la figura en los puntos *A* y *B* la velocidad es ***v*** y ***v'*** en los tiempos *t* y *t'* , si el cambio de velocidad es $\Delta\boldsymbol{v}$ se define la **aceleración media** en el intervalo de tiempo Δt es

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

siendo $\boldsymbol{a}_m$ paralela a $\Delta\mathbf{v}$, que también se puede escribir de manera análoga a la empleada para velocidad media

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\mathbf{k}$$

La **aceleración instantánea** (en adelante **aceleración *a***) se define así:

$$\mathbf{a} = lim_{\Delta t \to 0}\mathbf{a}_m = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Luego, la aceleración es un vector con la misma dirección que el cambio instantáneo en la velocidad. La aceleración siempre se encuentra dirigida hacia la concavidad de la curva (la velocidad cambia en la dirección en la cual la trayectoria se curva) y no es ni tangente ni perpendicular a la trayectoria.

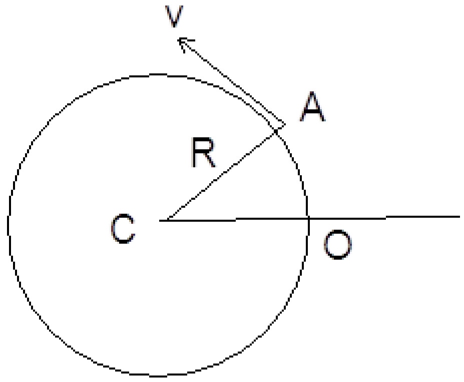
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

siendo $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \therefore a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \therefore a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ y el módulo del vector aceleración es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

**Movimiento circular.-**

Es el descrito por una partícula cuando su trayectoria es una circunferencia.




Una circunferencia de radio *R* que es recorrida por una partícula. En una posición cualquiera *A* esta partícula posee una velocidad ***v*** (es tangente a la circunferencia y perpendicular al radio *R* de la circunferencia). La distancia s recorrida por la partícula a partir del punto O es s = R.θ, por tanto, la velocidad es

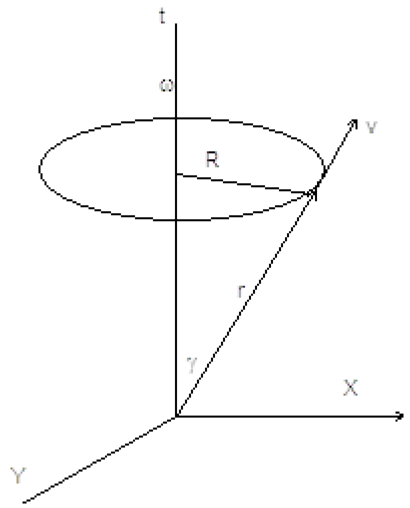
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\vartheta}{dt}$$

Siendo

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

la **velocidad angular** de la partícula (variación del ángulo descrito en la unidad de tiempo), luego la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular es v = ω.R.

La velocidad angular ω es un vector cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento en el sentido de avance de un tornillo que gira en el mismo sentido en que se mueve la partícula.




Como $R = r \cdot \text{sen}\gamma$ y $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{k}$ , luego

$$v = \omega r \cdot sen\gamma$$

resultado válido sólo para el movimiento circular ( *r* y γ son constantes).

**Movimiento circular uniforme.-**

Es un movimiento circular en el que la velocidad angular es constante, w = constante. Es un movimiento periódico pues la partícula pasa por cada punto de la circunferencia a intervalos iguales de tiempo.

En un movimiento periódico se llama **período *T*** al tiempo empleado en dar una vuelta completa o revolución se denomina **frecuencia** ν es el número de revoluciones por unidad de tiempo. Si en el tiempo *t* la partícula realiza *n* revoluciones el período es

$$T = \frac{t}{n} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{n}{t} \quad \text{por lo tanto} \quad \nu = \frac{1}{T}$$

las magnitudes *período* y *frecuencia* son aplicables en todos los procesos o movimientos periódicos (suceden de forma cíclica o que se repiten después de completar cada ciclo)

Si la velocidad angular ω es constante y recordando la expresión matemática que la define podemos escribir

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0)$$

expresión análoga a la empleada en el movimiento rectilíneo uniforme.

Suponemos $\theta_0$ y $t_0$ son nulas, tenemos θ = $\omega . t \rightarrow \omega = \frac{\vartheta}{t}$

Para una revolución completa, es $t = T$ y $\theta = 2\pi$ luego $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

## Aceleración angular.-

Cuando la velocidad angular de una partícula se modifica o cambia con el tiempo se puede definir la **aceleración angular *a*** así

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Como el movimiento circular se realiza en un plano, por tanto, la dirección de la velocidad angular permanece invariable. A este movimiento de le denomina movimiento circular uniformemente acelerado.

**Movimiento circular uniformemente acelerado.-**

$$\int_{w_0}^{\omega_0} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

siendo $\omega_0$ el valor de w para el tiempo $t_0$,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \rightarrow \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

expresión que proporciona la posición angular en un instante cualquiera.

**Componentes tangencial y normal de la aceleración.-**

La aceleración a atribuida a una partícula que se mueve ajustada a un movimiento curvilíneo se puede descomponer en dos componentes que se denominan

· <u>Aceleración tangencial</u> $a_t$ paralela a la tangente en el punto considerado y se relaciona con el cambio del módulo de la velocidad

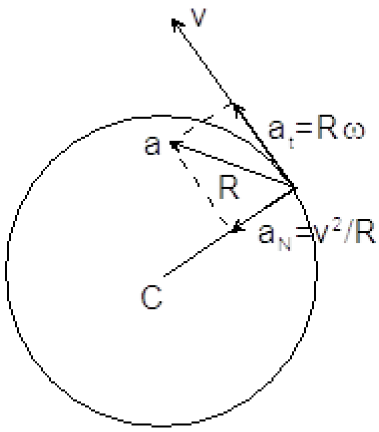
· <u>Aceleración normal</u> $a_n$ paralela a la dirección normal y se relaciona con el cambio en la dirección de la velocidad.

Tanto la aceleración tangencial como la aceleración normal se denominan, también, *componentes intrínsecas del vector aceleración* y aunque vamos a expresarlas para un movimiento circular son conceptos válidos para el movimiento que siga cualquier trayectoria plana.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R}{R} = \omega^2 R$$

magnitudes que se representan en la figura adjunta.




<u>Caso particular.-</u>

En un movimiento circular uniforme (aceleración angular es nula), en consecuencia, no existe aceleración tangencial $a_t$ pero si existe aceleración normal $a_n$ (llamada también *aceleración centrípeta*) pues la dirección de la velocidad cambia.

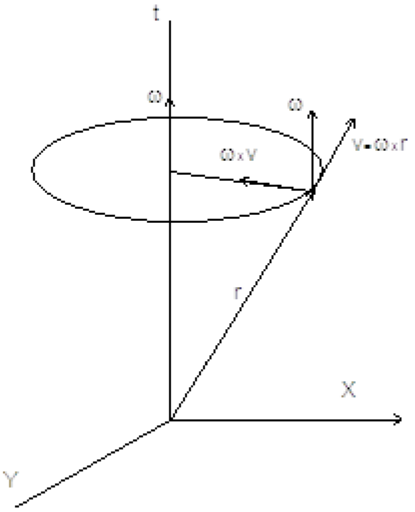
Cuando se trata de un movimiento circular uniforme (la velocidad angular es constante) y se puede escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

y como $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, al tratarse de un movimiento circular uniforme esta aceleración debe ser la aceleración centrípeta tal como se representa en la figura siguiente, donde se aprecia que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es un vector dirigido hacia el centro del círculo

$$\left|\omega \times \mathbf{v}\right| = \omega v = \omega^2 R$$

ya que la velocidad angular es perpendicular a la velocidad y $v = \omega \cdot R$.




## EJEMPLO.-

Un disco circular tiene un radio de 20 cm gira con una velocidad angular de 50 rpm (revoluciones por minuto). Determinar la velocidad de los puntos de la periferia del disco, el ángulo descrito en *10* minutos y las componentes intrínsecas de la aceleración.

**RESOLUCIÓN.-**

Como los puntos de la periferia del disco se encuentran a una distancia del centro de R = 20 cm = 0,20 m. Como la velocidad angular es 50 rpm que expresadas en rad.s-1 es

$$\omega = 50rpm = 50\frac{rev}{\min}\frac{2\pi\, rad}{rev}\frac{1\min}{60s} = \frac{5\pi}{3}rad \cdot s^{-1}$$

$$v = \frac{5\pi}{3}0{,}20 = \frac{\pi}{3}m \cdot s^{-1}$$

El ángulo descrito en 10 minutos (10·60 = 600 s) es

$$\varphi = \omega \cdot t = \frac{5\pi}{3} \cdot 600 = 1000\pi \ rad$$

que también se puede expresar en revoluciones:

$$1000\,\pi\, rad\,\frac{1rev}{2\pi\, rad} = 500\ rev$$

Como se trata de un movimiento circular uniforme la aceleración tangencial es nula, solamente se debe calcular, por tanto la aceleración normal

$$a_n = \omega^2 R = \left[\frac{5\pi}{3}\right]^2 \cdot 0{,}20 = \frac{5\pi^2}{9}m \cdot s^{-2}$$

## EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

La rueda de una bicicleta tiene un radio *r = 60 cm*, partiendo del reposo, gira durante *30 s* con una aceleración angular $\alpha = 3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$. A continuación mantiene la velocidad adquirida durante 1 minuto. Determinar la velocidad angular adquirida así como la velocidad de la bicicleta y la distancia recorrida por la bicicleta

**Resolución.-**
La velocidad angular adquirida cuando han transcurrido 30 s es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t_1 - t_0) = 3\cdot 30 = 90\ rad\cdot s^{-1}$$

La velocidad de la bicicleta se corresponde con la velocidad lineal de los puntos de la periferia de la rueda

$$v = \omega\cdot \text{R} = 90 \cdot 0{,}60 = 54\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

El ángulo girado durante los 30 s primeros es

$$\vartheta = \frac{1}{2}\alpha(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 30^2 = 1350\,rad = \frac{675}{\pi}\,rev$$

La distancia recorrida por la bicicleta coincide con el arco descrito por la rueda

$$\Delta s = \gamma\cdot \text{R} = 1350 \cdot 0{,}60 = 810\ \text{m}$$

## REFERENCIAS:


- Tipler, O.P., *Física Universitaria* (2 vol), Barcelona: Reverté, 1987.
- Cromer, A., *Física en la Ciencia y en la Industria*, Barcelona: Reverte, 1998
- Alonso-Finn, *Física*, México: Pentice Educación, 1995


## AUTOR:


- Joaquín Summers Gámez